Title	Mumfordの擬射影平面に関連したsmoothingの問題
Author(s)	石田, 正典
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1988), 1988: 219-227
Issue Date	1988
URL	http://hdl.handle.net/2433/212675
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.219-227

Mumford の擬射影平面に関連した smoothing の問題

東北大学理学部　石田正典

序文

もう１０年以上前になるが、マンフォードは [6] において射影平面と同じベッチ数を持つ一般型代数曲面を構成した。いわゆるマンフォードの擬射影平面 (Mumford's fake projective plane) である。この性質を持つ一般型代数曲面はいまだにこれ以外に知られていない。またマンフォードの曲面自体、２進整数環上の形式スキームの代数化という方法で構成された為、その複素解析的構造を知ることが困難で、ヤウの定理により普遍被覆空間が単位球になること以外ほとんど何もわかっていない。

[4] ではマンフォードの曲面 M の８次の不分岐被覆 V への位数１６８の単純群 G の作用について調べ、V/G が楕円曲面になること等がわかったが、その楕円曲面もまだ確定できていない。

ここではマンフォードの曲面の標数２の素体 $\mathbf{F}_2$上のファイバーについての組み合わせ的問題の計算結果と、それから生じる $\mathbf{F}_2$上定義された正規交叉のみを特異点として持つ曲面の標数０への非特異持ち上げの問題について考えたことを述べる。

1　マンフォードの曲面の閉ファイバーの組み換え

マンフォードの曲面は正確には３次元正則かつ $\mathbf{Z}_2$上の相対２次元射影スキーム M として与えられ、Spec $\mathbf{Z}_2$の生成点での幾何学的ファイバー $M_{\bar{\mathbf{Q}}_2}$ が擬射影平面となる。マンフォードはその構成において栗原及びマスターフィンによる p 進単位球体の理論を用いた。つまり２次元２進単位球体 $\mathcal{X}$ を GL $(3, \mathbf{Q}_2)$ のある離散部分群 Γ の自由な作用で割って出来た $\mathbf{Z}_2$上の形式スキーム $\mathcal{X}/\Gamma$ を考え、それをグロタンディエックの理論 [3] により代数化したものがその M である。

$\mathbf{Z}_2$スキーム M の閉点 Spec $\mathbf{F}_2 \subset$ Spec $\mathbf{Z}_2$ 上のファイバー M_0は、正規交叉のみを特異点として持つ２次元既約 $\mathbf{F}_2$スキームである。M_0の正規化 $\tilde{M}_0$ は $\mathbf{F}_2$上の射影平面 $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ をその上の７つの $\mathbf{F}_2$有理点でブローアップしてできた有理曲面 B と同一視出来る。$p : B \longrightarrow \mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ を自然な正則写像とする。７つの $\mathbf{F}_2$有理点の p による引き戻しを $E_1, \cdots, E_7$ とする。これらは第一種例外曲線であり以後 (-1) 曲線と呼ぶ。また $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ には７本の $\mathbf{F}_2$上定義された直線が存在するが、それらの p による引き戻しの主要成分を $C_1, \cdots, C_7$ とする。これらは自己交点数が－２の非特異有理曲線で、以後 (-2) 曲線と呼ぶことにする。各 E_i は $\mathbf{P}^1{}_{\mathbf{F}_2}$ と同型であり丁度３つの $\mathbf{F}_2$有理点を持つ。従って B 上の $\mathbf{F}_2$有理点は２１個でこれを $P_1, \cdots, P_{21}$ とおく。また $A = E_1 \cup \cdots \cup E_7 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_7 \subset B$ とおく。A は１４本の既約因子からなり $P_1, \cdots, P_{21}$ で通常２重点を持つ。

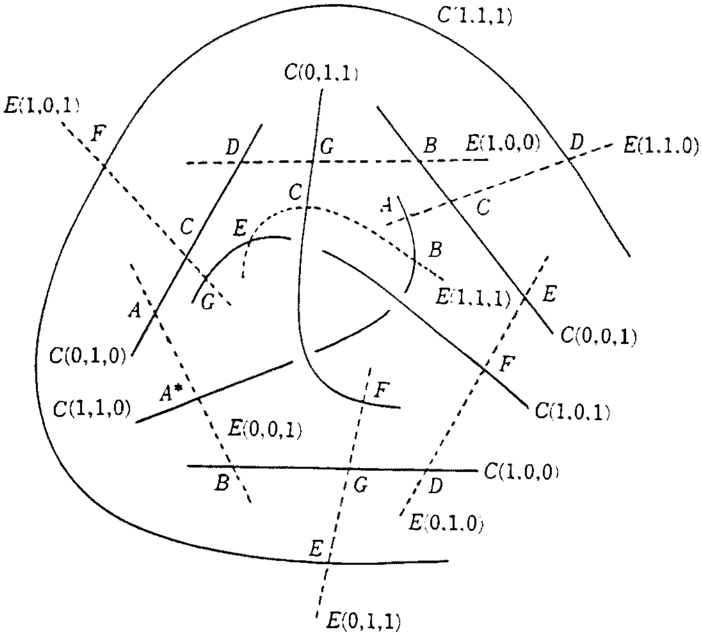

図 1: M_0の展開図

$\mathbf{F}_2$スキーム M_0はその正規化 Bの適当な 7 組の (-1) 曲線と (-2) 曲線との対をそれぞれ同型により 1 つの有理曲線に同一視する事により回復される。その 7 つの組と同一視の仕方を具体的に示したのが図 1 である。ここで $C(a,b,c)$ とあるのは $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$の直線 $aX_0+bX_1+cX_2=0$ の引き戻しである C_iのことで、$E(a,b,c)$ は $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$の点 $(a:b:c)$ の p による引き戻しである E_jのことである。

図の各交点に A から G までの記号がつけられているが、各 C_i に対しその上にある 3 つの記号と同じ記号を持つ E_jが必ず唯 1 つあり、その C_iと E_jが同じ記号のある点がそれぞれ 1 つの点になるように同一視される。そしてそれぞれが曲面 M_0の正規交叉している部分の 2 重曲線となる。但し $C(1,1,0)$ と $E(0,0,1)$ との同一視はは A $\rightarrow$ A*, A* $\rightarrow$ A, B $\rightarrow$ B となるようにする。したがってこれから得られた 2 重曲線は 2 重点を持つ。A から G の各記号について、その記号のつけられた 3 つの点は M_0では同一視されて正規交叉の 3 重点となる。

M_0が Bからこのようにして作られることは $\mathcal{X}$に対応するティッツビルディングへの離散群 Γ の作用を見ることにより確認出来る。

このようにマンフォードの擬射影平面の標数 2 への退化である M_0の構造は完全にわかったことになる。

ここで多分にパズル的な興味から考えたことであるが、逆に Bの上の曲線 $C_1,\cdots,C_7$及び $E_1,\cdots,E_7$から 1 つずつ 7 組の対を作りそれぞれを同一視して出来た曲面がいつ正規交叉のみを特異点として持つかを考えてみる。なお、この様な同一視は一般にはスキームのカテゴリーではなく更に広い代数的空間 (algebraic space) の範囲で考えなくてはならない。

まず 7 組の対の作り方は 7 ! とおりである。また各組について同一視の仕方は、$\mathbf{P}^1{}_{\mathbf{F}_2}$の自己

同型群 PGL $(2,\mathbf{F}_2)$ の位数と同じ6とおりだから、全体として７！×（６の７乗）（約１４億）とおりの同一視の仕方が考えられる。これらの内どれが正規交叉のみを特異点として持つ曲面を与えるかはBの２１個の$\mathbf{F}_2$有理点が同一視により３つずつ７組の同値類に分かれることが必要かつ十分な判定条件となる。

これをパソコンを使って調べてみた。実際に１４億回ループを回すと大変だが再帰性を使ったプログラムで行なうと以外に簡単で、数分で４０８とおりの同一視だけが正規交叉のみの曲面を与えることがわかり、実際にその４０８とおりの組み合わせを書き出すことが出来た。

さて $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ には位数１６８の単純群 $G=\mathrm{PGL}\,(3,\mathbf{F}_2)$ が作用しており $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ の７つの $\mathbf{F}_2$有理点の集合が G の作用で不変であることによりこれは Bへの作用に持ち上げられる。この作用により、先の４０８とおりの組み合わせ方は７つの軌道に分解される。その類等式は

$$408=168+56+56+56+56+8+8$$

となる。このうち最初の１６８は先に図１に書いたマンフォードの M_0 を与える組み合わせの同値類である。

つまり正規交叉を与える組み合わせが本質的に７とおり存在し、その内マンフォードの曲面から得られるものだけが全く対称性を持っていないことがわかる。

新しい6とおりの組み合わせ方の各代表を表１に示した。(1) から (6) の各縦列にあるAからGの記号を図１の各２重点に書き込めばそれぞれの展開図となる。但し、図１で入れた星印はここでは省略してあるので１つの曲線上に同じ記号が２つついている時はその対と固定点の無いように同一視する。(0) には図１と同一ではないが共役な組み合わせを１つ書いた。

表１の (1) から (6) の各組み合わせ方により得られた曲面をそれぞれ $M_0^{(1)}$から $M_0^{(6)}$ とする。これらはまずは代数的空間と考える。

命題 1.1. 各 $k=1,\cdots,6$ について $M_0^{(k)}$は $\mathbf{F}_2$上射影的である。Kを $M_0^{(k)}$の標準束とすると $k=1,2$ のとき $K^{\otimes 2}$、また $k=3,4,5,6$ のとき $K^{\otimes 3}$が非常に豊富 (very ample) である。

証明 $E'=E_1+\cdots+E_7$とおき $\mathcal{L}$ を B上の可逆層 $p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(4)\otimes\mathcal{O}_B(-E')$ とする。この可逆層は非常に豊富であり, $\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L})$ は $\mathbf{F}_2[X_0,X_1,X_2]$ の斉次４次式で $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ の７つの $\mathbf{F}_2$有理点で 0 となるもの全体と自然に１対１に対応している。

さて $M_0'=M_0^{(k)}$ とおき、必要なら $E_1,\cdots,E_6$の番号を付け替えることにより M_0'は B上の曲線の同型 $\phi_i:E_i\to C_i$, $i=1,\cdots,7$ による同一視から得られると仮定する。$\alpha':B\longrightarrow M_0'$を自然な正規化の写像とする。

まず $k=1,2$ の場合を考える。表２から得られた展開図からわかるように、このときすべての二重曲線 D_iが非特異である。

ベクトル空間 $\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L}^{\otimes 2})$ は自然に $\mathrm{H}^0(\mathbf{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(8))$ の部分空間と考えられる。後者は多項式環 $\mathbf{F}_2[X_0,X_1,X_2]$ の斉次８次式全体に等しく４５次元である。完全列

$$0\to\mathcal{L}^{\otimes 2}\longrightarrow p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(8)\longrightarrow\oplus_{i=1}^7\mathcal{O}_{2E_i}\to 0$$

を考える。ここで $2E_i$はイデアル $\mathcal{O}_B(-2E_i)$ で定義された Bの閉部分スキームである。容易にわかるように $\dim\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{2E_i})=3$, $i=1,\cdots,7$ であるから $\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L}^{\otimes 2})$ は少なくとも２４次元となる。さらに、曲面 Bの２１個の $\mathbf{F}_2$有理点 $\{P_1,\cdots,P_{21}\}$ で零となる $\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L}^{\otimes 2})$ の元全体は３

2重点	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$E(1,0,0)\cap C(0,1,0)$	A	C	C	A	A	A	A
$E(1,0,0)\cap C(0,0,1)$	C	A	A	B	B	C	C
$E(1,0,0)\cap C(0,1,1)$	B	B	B	C	C	B	B
$E(0,1,0)\cap C(1,0,0)$	B	B	B	B	B	B	B
$E(0,1,0)\cap C(0,0,1)$	D	F	E	D	D	D	D
$E(0,1,0)\cap C(1,0,1)$	A	D	G	A	A	G	G
$E(0,0,1)\cap C(1,0,0)$	A	A	A	A	A	A	A
$E(0,0,1)\cap C(0,1,0)$	D	D	D	D	D	A	A
$E(0,0,1)\cap C(1,1,0)$	F	G	G	G	G	D	D
$E(1,1,0)\cap C(0,0,1)$	E	E	F	E	E	E	E
$E(1,1,0)\cap C(1,1,0)$	G	C	B	C	F	G	B
$E(1,1,0)\cap C(1,1,1)$	G	D	D	F	E	E	F
$E(1,0,1)\cap C(0,1,0)$	B	E	E	B	B	D	D
$E(1,0,1)\cap C(1,0,1)$	F	G	F	D	D	C	E
$E(1,0,1)\cap C(1,1,1)$	E	B	A	E	E	E	C
$E(0,1,1)\cap C(1,0,0)$	C	C	C	C	C	C	C
$E(0,1,1)\cap C(0,1,1)$	F	G	F	F	C	F	F
$E(0,1,1)\cap C(1,1,1)$	G	F	G	G	F	G	F
$E(1,1,1)\cap C(1,1,0)$	C	F	E	F	G	B	G
$E(1,1,1)\cap C(1,0,1)$	D	A	C	G	G	F	G
$E(1,1,1)\cap C(0,1,1)$	E	E	D	E	F	F	E
共役類の大きさ	168	8	8	56	56	56	56
2重点を持つ2重曲線	1	0	0	0	3	3	3

表 1: $M_0^{(k)}$の展開

次元以上あることがわかる。しかし、これを $\mathrm{H}^0(\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}(8),\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2})$ の部分空間として見ると、各元が7つの$\mathbf{F}_2$有理直線上で零となることがわかり7次式

$$u = X_0X_1X_2(X_0+X_1)(X_0+X_2)(X_1+X_2)(X_0+X_1+X_2)$$

を因子として持つことになり、丁度3次元のベクトル空間

$$L_0 = \{(aX_0+bX_1+cX_2)u\ ;\ a,b,c\in\mathbf{F}_2\}$$

に等しいことがわかる。

このことから $\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L}^{\otimes 2})$ は丁度24次元であり、AからGまでの7つの各記号について、その記号のついている点で1（つまり零でない）となり、その他の記号の点で零となる $\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L})$ の元が存在することがわかる。ここで可逆層$\mathcal{L}^{\otimes 2}$のE_iやC_iへの制限の次数は2であり各切断は3点での値で決まる。従って、$\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L}^{\otimes 2})$ の部分空間

$$L_1 = \{s\in\mathrm{H}^0(B,\mathcal{L}^{\otimes 2})\ ;\ s|_{E_i} = \phi_i{}^*(s|_{C_i}), i=1,\cdots,7\}$$

は１０次元で固定点を持たずBから$\mathbf{P}^9_{\mathbf{F}_2}$への正則写像を与えることがわかる。但しここで使っている$\phi_i{}^*$は$\mathbf{F}_2$スキームE_i上の可逆層の自己同型が恒等写像のみであることから一意的に定まる引き戻しであることに注意する。xをM_0'の点、つまりある体kについてのk有理点、sをL_1の元とするときL_1の定義よりsは$\alpha'^{-1}(x)$上で恒等的に零かまたはどの点でも零でない。そこで、それに応じてsはxで零とか零でないと云うことにする。

L_1から得られた写像を$\alpha'' : B \longrightarrow \mathrm{P}^9_{\mathbf{F}_2}$とおき$M_0'' = \alpha''(B)$とおく。$B$上の曲線$E_i$と$C_i$がすべての$i$について$M_0''$で同一視されていることから自然な写像$\beta : M_0' \longrightarrow M_0''$が得られるが、これが同型であることを示す。

まず同型$\phi_i : E_i \to C_i$から得られるM_0'の２重曲線をD_iとし$D = D_1 \cup \cdots \cup D_7$とおく。また$Q_1, \cdots, Q_7$を$M_0'$の３重点とし$S = \{Q_1, \cdots, Q_7\}$とおく。

βが同型であることというには次を示せば良い。

(i) $\beta(M_0' \setminus D)$, $\beta(D \setminus S)$, $\beta(S)$はいずれも互いに交わらない。

(ii) βの$M_0' \setminus D$への制限は埋め込みである。

(iii) βのDへの制限は単射である。

(iv) βはSの各点の近傍で同型である。

(v) βは$D \setminus S$の各点の近傍で同型である。

以下これらを示す。

(i) $\beta(M_0' \setminus D) \cap \beta(D) = \emptyset$であることは部分一次系$L_0$の固定部分が$A$であり、$\alpha'(A) = D$であることから従う。$\beta(D \setminus S) \cap \beta(S) = \emptyset$であることは$Q_i \in S, x \in D \setminus S$に対し、$x$を含む$D$の既約因子$D_j$が$Q_i$を含めば$Q_i$で零で$x$で零でない$L_1$の元があり、さもなければ$Q_i$で１で$D_j$で恒等的に零となる$L_1$の元が存在することからいえる。

(ii) $M_0' \setminus D = B \setminus A$は$\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$の開部分スキームと同型であり部分一次系$L_0$はそこで直線の完備一次系と同じであるので正しい。

(iii) まずSの各点について、その点だけで１となり他のSの点で零となるL_1の元が存在するのでβのSへの制限は単射である。M_0'の２つの２重曲線で３点を共有するものはない。従って任意の２つの２重曲線について一方で恒等的に零で他の一方では２つの$\mathbf{F}_2$有理点でのみ零となるL_1の元が存在する。従ってD_i, D_jが相異なるM_0'の２重曲線であれば$\beta(D_i \setminus S) \cap \beta(D_j \setminus S) = \emptyset$である。$\beta$の$D_i$への制限は２次曲線としての埋め込みになっているので単射である。(i)を考え合わせれば(iii)がいえる。

(iv) $M_0' = M_0^{(1)}$又は$M_0^{(2)}$の場合、表１からわかるようにSの任意の点Qに対しQを含む２重曲線は３本で、それらはQ以外では交わらない。従って、そのうち任意の２本の上で恒等的に零で残りの１本ではQとSの別の１点だけで１位の零をとるL_1の元が存在する。このことからβの３重点Qでの接空間の写像は単射となり(iv)がいえる。

(v) D_iをM_0'の２重曲線xを$D_i \setminus S$の点とし$x' = \beta(x)$とおく。すでにβの単射性は示されているのでE_iの点yとC_iの点zで$\alpha''(y) = \alpha''(z) = x'$を満たすものがいずれも一意的に存在する。このとき接空間の写像$d\alpha''(y) : \mathrm{T}_{y,B} \longrightarrow \mathrm{T}_{x',\mathbf{P}^9}$と$d\alpha''(z) : \mathrm{T}_{z,B} \longrightarrow \mathrm{T}_{x',\mathbf{P}^9}$について$H_1 = d\alpha''(y)(\mathrm{T}_{y,B})$, $H_2 = d\alpha''(z)(\mathrm{T}_{z,B})$とおく。$\beta$が$x$の近傍で同型であることを示すには$\dim\ H_1 = \dim\ H = 2$かつ$H_1 \neq H_2$を示せば良い。まず$d\alpha''(y)(\mathrm{T}_{y,E_i}) = d\alpha''(z)(\mathrm{T}_{z,C_i}) =$

$\mathrm{T}_{x',\beta(D_i)}$であるので、いずれも1次元部分空間 $\mathrm{T}_{x',\beta(D_i)}$を含む。また L_0の元で E_iまたは C_iで1位の零しかとらないものがそれぞれ存在するので H_1,H_2はいずれも2次元である。また直線 $aX_0+bX_1+cX_2=0$ が C_iの $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$への像と異なり、かつ E_iの像である点を含むように a,b,c をとれば $(aX_0+bX_1+cX_2)u\in L_0$は C_iで1位の零 E_iで2位の零を持つので $H_1\neq H_2$である。

これで $k=1,2$ について M_0'が射影スキームであることはいえた。M_0'の特異点は正規交叉のみでゴーレンスタイン特異点であるから標準可逆層（双対化層）Kが存在する。ω_Bを Bの標準層とすると$\alpha'^{*}K=\omega_B(A)$ であり、[4, p.383] より$\alpha'^{*}K\simeq\mathcal{L}$ である。従って$\alpha'^{*}K^{\otimes 2}\simeq\mathcal{L}^{\otimes 2}$で、一方 $M_0'\subset\mathbf{P}^9_{\mathbf{F}_2}$に関して $\mathcal{O}_{M_0'}(1)$ を考えると$\alpha'^{*}\mathcal{O}_{M_0'}(1)=\mathcal{L}^{\otimes 2}$であり $\mathcal{L}^{\otimes 2}|_{E_i}$と$\phi_i^{*}(\mathcal{L}^{\otimes 2}|_{C_i})$ の同型が各 i について唯1つしかないことを考えると $K^{\otimes 2}\simeq\mathcal{O}_{M_0'}(1)$ を得る。従って $k=1,2$ の場合 $K^{\otimes 2}$は非常に豊富となる。

$k=3,4,5,6$ の場合の証明も方針は同じで $K^{\otimes 2}$でうまくいかない部分を $K^{\otimes 3}$に上げて示すだけである。証明が長くなっているのであとは省略するが、違いは $k=4,5,6$ の場合 M_0'の2重曲線で2重点を持つものがあり $\mathcal{L}^{\otimes 2}$で作った写像はその2重曲線で単射でなく $\mathbf{P}^9_{\mathbf{F}_2}$の直線の分岐2重被覆となる。また $k=3$ のときは表1のFに対応する M_0'の3重点の接空間の像が2次元に退化しそこで埋め込みにならない。これらの問題は $\mathcal{L}^{\otimes 3}$では起こらない。これは L_1を同様に定義したとき、任意の D_iに対し他の2重曲線上では恒等的に零で D_iだけでは零でない L_1の元が存在することによる。これらの場合は完備一次系により M_0'は $\mathbf{P}^{27}_{\mathbf{F}_2}$に埋め込まれる。

注意　マンフォードの曲面 Mの場合 M_0は2重点を持つ2重曲線が1つあるので上の $k=4,5,6$ の場合と同じで$\omega_M^{\otimes 2}$から作った写像 $M\longrightarrow\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{Z}_2}$は M_0上では埋め込みにならないが $\mathrm{Spec}\mathbf{Z}_2$の生成点上で、つまりマンフォードの擬射影平面への制限は埋め込みになっていることが確かめられる。

2　d半安定性と問題点

マンフォードの擬射影平面の標数2への退化が M_0と考えられるので逆に $M_0^{(k)}$について次のことが問題となる。

問題　$k=1,\cdots,6$ について $M_0^{(k)}$は $\mathbf{Z}_2$上、標数0に非特異に持ち上げられるか。具体的には、正則な $\mathbf{Z}_2$平坦射影スキーム $M^{(k)}$が存在して $M^{(k)}\otimes_{\mathbf{Z}_2}\mathbf{F}_2\simeq M_0^{(k)}$ となるか。

命題1.1より埋め込まれた $\mathbf{P}^9$または $\mathbf{P}^{27}$の中での $M_0^{(k)}$の変形を考えるべきなのであろうがデータが複雑になりすぎて、まだ無限小変形についても可能かどうか確認できていない。可能性のための弱い条件である次は成立する。

命題 2.1. $k=1,\cdots,6$ について $M_0^{(k)}$はフリードマンの意味でd半安定である。

フリードマン [2] のd半安定性は変形による大域的非特異化のための必要条件で、そこでは複素数体上の単純正規交叉型の多様体に対して定義されているが、標数正の体上の正規交叉型の多様体でも同様に定義出来る。以下少し説明を行なう。

Xを体 k上定義された既約とは限らない代数多様体で$\bar{k}$を kの代数的閉包とする時 $X\otimes_k\bar{k}$が特異点として正規交叉しか持たないと仮定する。そのとき [7] による Xの余接複体 $L_X^{\bullet}$から得られる

$$\mathcal{T}^1=\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(L_X^{\bullet},\mathcal{O}_X)$$

は [5] に局所的な形が与えられている様に X の特異部分 D 上の可逆層となる。

kを剰余体とする離散付値環上の正則固有スキーム V が存在して閉点上のファイバーが X と同型になる場合 $\mathcal{T}^1$ は $\mathcal{O}_D$ と同型になる。従って $\mathcal{T}^1 \simeq \mathcal{O}_D$ であることは X が大域的に変形で非特異化出来るための必要条件となりこれを X の d 半安定性という。

命題 2.1 の証明 $X = M_0^{(k)}$ とおき $D = D_1 \cup \cdots \cup D_7$ 上の可逆層 $\mathcal{T}^1$ を考える。$\tilde{D}_i$を 2 重曲線 D_iの正規化とし$\lambda_i : \tilde{D}_i \longrightarrow D$を自然な写像とする。また D_iは E_iと C_iの同一視から得られたものとし $\epsilon_i : \tilde{D}_i \longrightarrow E_i$, $\delta_i : \tilde{D}_i \longrightarrow C_i$ をそれぞれ自然な同型とする。[5, Theorem 2.3] または [2, Proposition 2.3] からわかるように同型

$$\lambda_i^* \mathcal{T}^1 \simeq \epsilon_i^* N_{E_i/B} \otimes \delta_i^* N_{C_i/B} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{D}_i}(P_0 + P_1 + P_\infty)$$

を得る。ここで P_0, P_1, P_∞ は$\tilde{D}_i$の 3 つの $\mathbf{F}_2$有理点である。

E_iは (-1) 曲線 C_iは (-2) 曲線だから$\lambda_i^*(\mathcal{T}^1)$ の次数は 0 であり、$\tilde{D}_i \simeq \mathbf{P}^1{}_{\mathbf{F}_2}$であることから $\lambda_i^*(\mathcal{T}^1) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{D}_i}$ を得る。

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{T}^1) \hookrightarrow \oplus_{i=1}^7 \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\tilde{D}_i}) = \mathbf{F}_2{}^{\oplus 7}$$

であるが $D_1, \cdots, D_7$の 2 重点や互いに交わっている点はすべて $\mathbf{F}_2$有理点であるから $(1, \cdots, 1) \in \mathbf{F}_2{}^{\oplus 7}$ は $\mathrm{H}^0(\mathcal{T}^1)$ の元であることがわかる。よって可逆層 $\mathcal{T}^1$ はいたるところ零でない切断を持ち $\mathcal{T}^1 \simeq \mathcal{O}_D$となる。 証明終わり

問題で述べた $M^{(k)}$は、その存在も一意性も不明であるが、存在すると仮定してその無限小変形を考えてみる。

n を自然数とし

$$M_n^{(k)} = M^{(k)} \otimes_{\mathbf{Z}_2} (\mathbf{Z}_2/2^{n+1}\mathbf{Z}_2)$$

とおく。$M_n^{(k)}$は $\mathbf{Z}/2^{n+1}\mathbf{Z}$ スキームとなる。$M_n^{(k)}$の展開 $\tilde{M}_n^{(k)}$を次のように定義する。

正規交叉型の曲面 $M_0^{(k)}$のエタール被覆 $V_0 \longrightarrow M_0^{(k)}$で V_0の各既約成分が非特異となるようにとる。$M_0^{(k)} = (M_n^{(k)})_{\mathrm{red}}$であるので $M_n^{(k)}$のエタール被覆 V_nで $(V_n)_{\mathrm{red}} = V_0$ となるものが一意的に存在する。V_nの各被約な既約成分 X に対し X の V_nでの定義イデアルを I_X とし、I_X^{n+1}で定義される V_nの閉部分スキームを X_nとおく。また X 以外の V_nの被約な既約成分の和の X_nへの制限を $A(X_n)$ とおく。そして V_nすべての既約成分 X についての X_nの直和をとったものを$\tilde{V}_n$とする。作り方から自然な写像 $\phi : \tilde{V}_n \longrightarrow V_n$が存在し $\phi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}_n} \supset \mathcal{O}_{V_n}$となる。$\tilde{V}_n$のエタールな関係

$$(\phi \times \phi)^{-1}(V_n \times_{M_n^{(k)}} V_n) \subset \tilde{V}_n \times \tilde{V}_n$$

から得られる代数的空間を$\tilde{M}_n^{(k)}$とおく。$(\tilde{M}_n^{(k)})_{\mathrm{red}}$ は $M_0^{(k)}$ の正規化と同じで B に等しくスキームであることから$\tilde{M}_n^{(k)}$も [1, III,Cor.3.6] によりスキームとなる。$\tilde{M}_n^{(k)}$には閉部分スキーム $A(\tilde{M}_n^{(k)})$ が存在して各 X_nへの引き戻しが $A(X_n)$ となる。

存在のわかっているマンフォードのスキーム M について $M \otimes_{\mathbf{Z}_2} (\mathbf{Z}_2/2^{n+1}\mathbf{Z}_2)$ の同様に定義された展開を $\mathcal{B}_n$と書くことにする。$\mathcal{B}_n$は M の 2 進単位球体を用いた構成法から次のように具体的に表わすことができる。

3 次元正則スキーム $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{Z}_2}$を閉部分スキーム $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$の 7 つの $\mathbf{F}_2$有理点でブローアップしたものを W とし、さらに $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$の 7 本の $\mathbf{F}_2$有理直線の W への引き戻しの主要成分である互いに交わ

らない７本の非特異有理曲線で W をブローアップしたものを V とおく。このとき $\mathbf{P}^2{}_{\mathbf{F}_2}$ の V への引き戻しの主要成分が B と同一視される。V の余次元１の閉部分スキームである B のイデアルを I_B とおけば $\mathcal{B}_n$ は V の I_B^{n+1} で定義された閉部分スキームに同型である。１４回のブローアップによる V での例外因子の和の $\mathcal{B}_n$ への制限を $\mathcal{A}_n$ とする。$\mathcal{A}_n$ は M に対して定義された $A(\mathcal{B}_n)$ に等しい。なお２次元２進単位球体 $\mathcal{X}$ はこの V の中の B の近傍を $\mathrm{GL}(3, \mathbf{Q}_2)$ の作用で動かして和をとったものである。

命題 2.2. 任意の $k = 1, \cdots, 6$ について、もし $M^{(k)}$ が存在したとすると各自然数 n について $\tilde{M}_n^{(k)}$ は $\mathcal{B}_n$ と同型である。

略証　$\mathcal{B}'_n = \tilde{M}_n^{(k)}$ 及び $\mathcal{A}'_n = A(\tilde{M}_n^{(k)})$ とおく。まず $\mathcal{B}'_n$ と $\mathcal{A}'_n$ の組がそれらの構造層として局所的には自然な写像

$$\mathbf{Z}_2[x, y, z]/(xyz - 2, z^{n+1}) \longrightarrow \mathbf{F}_2[x, y, z]/(xy, z^{n+1})$$

と同型であることを n に関する帰納法で証明する。これで $(\mathcal{B}'_n, \mathcal{A}'_n)$ が $(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$ と局所的には同型であることがわかる。

つぎに完全列

$$0 \to \mathcal{O}_B(nA) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B}'_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B}'_{n-1}} \to 0$$

が存在するが $\mathrm{H}^1(B, \Theta_B(nA)) = 0, n > 0$ を示すことにより $\mathcal{B}'_n$ が $\mathcal{B}'_{n-1}$ から一意的に定まることがわかる。よって帰納的に $\mathcal{B}'_n \simeq \mathcal{B}_n$ を得る。

注意　上の略証の中の $\mathcal{A}'_n$ と $\mathcal{A}_n$ が同型であることも容易に示せるが、組 $(\mathcal{B}'_n, \mathcal{A}'_n)$ として $(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$ と同型であるかどうかはわからない。実際 $A \hookrightarrow B$ の拡張である埋め込み $i : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{B}_n$ で $(\mathcal{B}_n, i(\mathcal{A}_n))$ と $(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$ が同型でない場合は存在する。これは $\mathrm{H}^1(B, \Theta_B)$ が６次元あることによる。

この命題より $M^{(k)}$ が存在すれば有限写像

$$\phi_n : \mathcal{B}_n \longrightarrow M_n^{(k)}$$

が存在し $\phi_{n*}\mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \supset \mathcal{O}_{M_n^{(k)}}$ が成り立つ。つまり $M_n^{(k)}$ は $\mathcal{B}_n$ からその部分スキーム $\mathcal{A}_n$ の無限小近傍を適当に同一視することにより得られることになるが、まだ同一視のためのデータがコントロールできていない。それができれば非常に具体的な問題であるから変形が可能かどうか判定できると思われる。

もし標数０に非特異持ち上げ可能であれば $c_1^2 = 3c_2 = 9$ を満たす一般型代数曲面が得られることになるが擬射影平面であるためには更に不正則数が０でなければならない。また、もし擬射影平面であったとしてもマンフォードのものと異なるかどうかの判定も困難そうである。

参考文献

[1] D. Knutson, Algebraic Spaces, Lecture Notes in Math. **203**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[2] R. Friedman, Global smoothings of varieties with normal crossings, Ann. of Math. **118** (1983), 75-114.

[3] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Élément de Géométrie Algébrique, III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **11** (1961).

[4] M.-N. Ishida, An elliptic surface covered by Mumford's fake projective plane, Tohoku Math. J. **40** (1988), 367-396.

[5] M.-N. Ishida and T. Oda, Torus embeddings and Tangent complexes, Tohoku Math. J. **33** (1981), 337-381.

[6] D. Mumford, An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$, in Contribution to Algebraic Geometry, Johns Hopkins Univ. Press, 233-244, 1979.

[7] S. Lichtenbaum and M. Schlessinger, The cotangent complex of a morphism, Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967), 41-70.